*Convegno "Matematica e Cultura"*
*(Venezia, 18-19 Marzo 2005)*

# Matematica e Cultura 2006

**Marco Li Calzi**
Dip.to di Matematica Applicata
Università "Ca' Foscari" di Venezia
Dorsoduro 3825/e, 30123 Venezia
Tel. 041-2346925
Fax 041-5221756
email: licalzi@unive.it

**M. Cristina Molinari**
Dip.to di Scienze Economiche
Università "Ca' Foscari" di Venezia
Cannaregio 873, 30121 Venezia
Tel. 041-2349139
Fax 041-2349176
email: cmolinar@unive.it

# Il gioco delle coppie

**Marco Li Calzi e M. Cristina Molinari**

*«La felicità di una persona sposata dipende dalle persone che non ha sposato.»*

Oscar Wilde

## Introduzione

Il gioco delle coppie è uno dei più antichi del mondo. Si prendono uomini e donne (preferibilmente non sposati) e li si lascia interagire, sperando che riescano a trovare un partner e a contrarre un matrimonio felice e duraturo.

Il gioco delle coppie è anche uno dei giochi più difficili da giocare, perché nessuno ne conosce esattamente le regole. Nonostante una fase di addestramento durante l'adolescenza, ai giocatori occorrono molti anni di esperienza ed un enorme investimento emotivo per impararne le nozioni fondamentali. Il gioco può riuscire crudele, specialmente con chi non raggiunge l'obiettivo finale e resta ``zitello". I giocatori che si sposano e lasciano il gioco scoprono se hanno vinto o no soltanto alla fine della loro vita. Talvolta, il caso o la necessità possono rimetterli in gioco contro la loro volontà.

Le ragioni che rendono il gioco delle coppie così difficile da giocare probabilmente spiegano il fascino che esso esercita su chi lo osserva dall'esterno. Naturalmente, ci sono modi diversi di interpretare il ruolo di osservatore. I lettori dei rotocalchi o il pubblico delle soap opera sono diversi dai letterati o dagli artisti — anche del cinema — che nel gioco delle coppie trovano una delle loro principali fonti di ispirazione.

L'occhio dell'osservatore matematico è particolarmente sensibile alle strutture formali. Così, quando la matematica osserva il gioco delle coppie, ne coglie soprattutto le caratteristiche che possono essere formalizzate in un modello. Ad esempio, Gottman et alii [1] mostrano come costruire modelli dinamici per descrivere e predire l'evoluzione di una conversazione tra due coniugi; si veda anche l'articolo di Swanson in questo volume. Invece, Bearman et alii [2] usano un grafo per descrivere le relazioni affettive e sessuali tra circa 800 studenti di scuola superiore in una cittadina del Midwest americano.

Proviamo ad osservare il gioco delle coppie indossando gli occhiali di un matematico. Costruiamo un modello (ovvero una versione stilizzata) del gioco delle coppie e vediamo quali proprietà emergono.

## 1. Il gioco delle coppie

Ci sono $n$ uomini ed $m$ donne. Ciascuno di loro ha un suo ordinamento di preferenza sui partners dell'altro sesso, in base al quale non è mai perfettamente indifferente fra due pretendenti. Queste persone cercano di combinare abbinamenti tra loro o, in un linguaggio più romantico, di contrarre matrimonio. Gli unici abbinamenti permessi sono rigorosamente monogami ed eterosessuali.

Consideriamo un esempio con tre uomini e quattro donne. I tre uomini si chiamano Bruno, Carlo e Dino. Le quattro donne si chiamano Anna, Elena, Ivana e Ondina. Per brevità, useremo spesso l'iniziale del nome per indicare di chi si sta parlando. Si noti che le iniziali degli uomini sono le prime tre consonanti (B, C, D) e quelle delle donne le prime quattro vocali (A, E, I, O).

Supponiamo che a Bruno piacciano nell'ordine Anna, Elena, Ivana e Ondina. Bruno vuole sposare Anna ma è disposto a prendere per moglie anche Elena o Ivana. Tuttavia, piuttosto che sposare Ondina, Bruno preferirebbe restare single. Per rappresentare questo ordinamento di preferenza, usiamo la notazione

Bruno: A > E > I > *

dove il segno ">" indica preferenza mentre l'asterisco "*" denota che a partire da quella posizione Bruno preferisce non sposarsi. Per il nostro esempio, supponiamo che le preferenze dei sette giocatori siano le seguenti.

Bruno: A > E > I > *

Carlo: I > E > A > *

Dino: A > I > E > O

Anna: C > D > B

Elena: B > C > D

Ivana: D > C > B

Ondina: D > B > C

Ci chiediamo quali abbinamenti dovremmo aspettarci. Anna, ad esempio, è ambita come prima scelta sia da Bruno sia da Dino.

Vorremmo sapere chi riuscirà a sposarla, posto che Anna non riesca a sposare invece Carlo, sua prima scelta. Naturalmente, in generale la risposta dipende dal contesto. In una società dove prevalgono gli uomini più anziani, probabilmente Anna finirebbe in sposa al più anziano tra Bruno e Dino. In una società dove prevalgono le donne, Anna magari riuscirebbe a prendere Carlo per marito.

Per essere concreti, analizziamo una versione moderna (e occidentale) del gioco delle coppie, in cui ci sono due elementari diritti da rispettare. Il primo diritto è che ciascuno è libero di restare single. Nessuno può imporre a qualcuno il matrimonio. Quindi, se Carlo non vuole sposare Ondina (come ci dicono le sue preferenze), siamo certi che l'abbinamento tra Carlo e Ondina non avrà corso. Il secondo diritto è che un coniuge può chiedere il divorzio, se trova un partner che gli piace di più di quello corrente e se questo è disposto a sposarlo. Ad esempio, se Anna sta con Dino, Anna può divorziare da Dino per mettersi con Carlo qualora Carlo sia disposto a sposarla. Naturalmente, se Carlo è già impegnato con Ivana (che lui preferisce ad Anna), Carlo non è disponibile. Quindi Anna resta con Dino soltanto se Carlo è gia impegnato con Ivana (o Elena).

Gli abbinamenti stabili sono quelli che rispettano questi due diritti degli individui. Nel nostro esempio ci sono soltanto due abbinamenti stabili. Il primo è [B-E, C-I, D-A, O single] ed il secondo è [B-E, C-A, D-I, O single]. Quindi, in questa particolare versione del gioco delle coppie, ci aspettiamo che alla fine emerga una di queste due configurazioni.

In generale, a seconda del numero di persone coinvolte e dei loro ordinamenti di preferenza, si possono avere pochi o molti abbinamenti stabili. Nel nostro esempio, ne abbiamo trovati due. Tuttavia, persino problemi molto piccoli possono avere un numero piuttosto alto di abbinamenti stabili. L'esempio 2.17 in [3] riporta un esempio ideato da Knuth dove un gioco delle coppie con quattro uomini e quattro donne ammette dieci diversi abbinamenti stabili.

Come è caratteristico del punto di vista matematico, possiamo ricavare alcuni enunciati che hanno validità generale per la nostra versione del gioco delle coppie. La monografia di Roth e Sotomayor [3] raccoglie molti di questi risultati e ne fornisce la dimostrazione. Qui scegliamo di richiamarne quattro.

Il primo teorema è che esiste sempre un abbinamento stabile, qualunque siano il numero dei giocatori e i loro ordinamenti di preferenza. Quindi il gioco delle coppie ammette in ogni caso almeno una soluzione. Gli abbinamenti stabili si possono determinare esaminando ad una ad una tutte le possibili configurazioni per accertare se rispettano i due diritti degli individui. Questo può essere molto laborioso. Nella prossima sezione, descriviamo l'algoritmo costruttivo di Gale e Shapley [4] con cui è possibile trovare in modo molto semplice almeno un abbinamento stabile. Il risultato di esistenza è un corollario della proposizione che l'algoritmo di Gale e Shapley conduce sempre ad un abbinamento stabile.

Il secondo teorema è che l'abbinamento stabile può non essere unico, come mostra anche il nostro esempio. In moltissimi casi, possiamo solo delimitare l'esito del gioco delle coppie ad una delle configurazioni corrispondenti ad un abbinamento stabile, ma non siamo in grado di prevedere quale. Non tutto, per fortuna, risulta predeterminato. Nel nostro esempio, ci attendiamo che Carlo sposi Anna o Ivana ma saranno il caso e l'abilità dei giocatori a fissare l'esito finale.

Il terzo teorema afferma che se un giocatore resta single in un abbinamento stabile allora resta single in qualsiasi altro abbinamento stabile. Nel nostro esempio, Ondina resta single in qualsiasi abbinamento stabile. Questo teorema non lascia margini al rimpianto: chi si ritrova "zitello" in un abbinamento stabile sarebbe rimasto tale anche se le cose fossero andate diversamente. Forse, questo può essere fonte di qualche consolazione: dopo tutto, comunque fosse andata, Ondina non sarebbe riuscita a trovare marito in un abbinamento stabile. Quindi, non ha nulla da rimproverarsi se è rimasta single.

Il quarto teorema richiede un po' di preparazione. Torniamo al nostro esempio, dove ci sono soltanto due abbinamenti stabili: [B-E, C-I, D-A, O single] e [B-E, C-A, D-I, O single]. Chiamiamo M il primo abbinamento ed F il secondo. Vediamo come ciascuno degli uomini giudica questi due abbinamenti. Bruno è indifferente, perché in entrambi sposa la stessa donna. Carlo preferisce M a F, perché in M sposa Ivana che è la sua prima scelta. Anche Dino preferisce M a F, perché in M sposa Anna che è la sua prima scelta. Quindi, per ciascuno degli uomini, l'abbinamento M è sempre migliore (o al più indifferente) dell'abbinamento F. Gli uomini preferiscono all'unanimità M a F.

Per le donne, succede esattamente il contrario. Elena e Ondina sono indifferenti tra M e F: la prima sposa sempre lo stesso uomo e la seconda non sposa comunque nessuno. Anna preferisce F a M perché sposa Carlo che è la sua prima scelta e Ivana preferisce F a M perché sposa Dino che è la sua prima scelta. In questo caso, le donne preferiscono all'unanimità F a M. (Le iniziali M ed F aiutano a ricordare quale dei due sessi preferisce l'abbinamento corrispondente.)

Se guardiamo alla scelta fra M ed F dal punto di vista dei sessi, c'è un ovvio conflitto. Gli uomini preferiscono collettivamente M e le donne preferiscono collettivamente F. Dato che siamo partiti da un esempio, questa divergenza nelle preferenze collettive potrebbe essere un caso. Invece il quarto teorema dice che essa è una caratteristica ineliminabile del gioco delle coppie. Se uno dei sessi preferisce collettivamente un certo abbinamento stabile ad un altro, allora il sesso opposto ha esattamente la preferenza opposta. In questo caso, il luogo comune che uomini e donne sono in perpetuo conflitto ha qualche fondamento.

## 2. Come si trova un abbinamento stabile

Ci sono molti modi di trovare un abbinamento stabile. Il più naturale ed il primo ad essere stato proposto è l'algoritmo di Gale e Shapley [4]. La sua caratteristica principale è di assegnare ai due sessi compiti diversi. Gli esponenti di un sesso hanno l'onere di proporre il matrimonio e gli esponenti dell'altro sesso l'onore di accettarlo. Per comodità di esposizione, supponiamo che siano gli uomini a proporre e le donne ad accettare. Più sotto, vedremo che cosa succede se si invertono i ruoli.

L'algoritmo procede per fasi. Al primo giro, ogni uomo chiede la mano della sua prima scelta (se ne ha una). Ogni donna valuta le eventuali proposte ricevute e sceglie se accettarne una o restare single. Se accetta, si "fidanza" con l'uomo proponente. Il fidanzamento non è definitivo e può essere sciolto nelle fasi successive.

Al giro successivo, ogni uomo che non sia fidanzato chiede la mano della sua prossima miglior scelta (se ne ha una). Ogni donna sceglie fra le eventuali proposte ricevute, il suo attuale fidanzato o restare single. Se accetta una proposta nuova, rompe il precedente fidanzamento e ne contrae un altro.

L'algoritmo si ripete ad oltranza, fino a quando si raggiunge uno stato in cui tutti gli uomini sono fidanzati oppure gli uomini single hanno chiesto la mano di tutte le donne che sono disposti a sposare. (Poiché il massimo numero di donne a cui un uomo può chiedere la mano è $m$, questo assicura che l'algoritmo termini al massimo in $m$ passi.) A questo punto, tutti i fidanzamenti sono confermati e si celebrano le nozze.

Verifichiamo il funzionamento di questo algoritmo sul nostro esempio. Al primo giro, Bruno e Dino chiedono la mano di Anna (che preferisce Dino e quindi si fidanza con lui) mentre Carlo si fidanza con Ivana. Al secondo giro, Bruno — l'unico senza una fidanzata — chiede la mano di Elena, che accetta. Tutti gli uomini sono fidanzati e l'algoritmo termina, producendo come abbinamento stabile la configurazione M.

Adesso, proviamo a invertire i ruoli e lasciamo che siano le donne a proporre e gli uomini ad accettare. Al primo giro, Anna si fidanza con Carlo, Elena con Bruno, e Ivana con Dino (che declina la proposta di Ondina). Nei due giri successivi, Ondina avvicina prima Bruno e poi Carlo, ma è sempre respinta. A questo punto, Ondina ha chiesto la mano di tutti gli uomini che è disposta a sposare e l'algoritmo termina, producendo come abbinamento stabile la configurazione F.

Come si ricorderà, uomini e donne hanno preferenze collettive opposte sugli abbinamenti stabili. Gli uomini preferiscono M a F, e le donne viceversa. Nel nostro esempio, la versione dell'algoritmo in cui sono gli uomini a proporre conduce all'abbinamento stabile M. Simmetricamente, la versione in cui sono le donne a proporre conduce all'abbinamento stabile F. Questa è una proprietà valida in generale. Fra tutti gli abbinamenti stabili, questo algoritmo trova sempre quello che risulta collettivamente preferito dal sesso a cui è affidato il compito di proporre. Naturalmente, esistono altri algoritmi più complessi in grado di trovare abbinamenti stabili meno estremi.

Si noti come il diritto di accettare o meno un'offerta di matrimonio risulti alla fine meno vantaggioso che avere il dovere di fare l'offerta. Il motivo è intuitivamente semplice. Chi fa le offerte comincia dalla sua scelta migliore e procede verso il basso, peggiorando la sua posizione soltanto se vi è costretto. Il suo ruolo è attivo. Chi accetta le offerte, invece, ha accesso al miglior partito che bussa alla sua porta ma non può darsi da fare attivamente per corteggiare un partner che ritiene migliore. Quindi ha un ruolo passivo.

Facciamo due osservazioni. La prima è che, se i due sessi dovessero dibattere quale versione dell'algoritmo sia preferibile, gli uomini difenderebbero la prima e le donne la seconda. Il conflitto tra i sessi si sposterebbe dalla preferenza collettiva sugli abbinamenti stabili alla scelta del metodo con cui trovarne uno.

La seconda osservazione ha natura più speculativa. Sia pure sommariamente, la versione dell'algoritmo in cui gli uomini propongono ricorda il modo prevalente con cui era organizzato il gioco delle coppie nel XIX secolo. Considerato che questo modo favoriva gli uomini, possiamo immaginare che uno dei progressi verso l'eguaglianza fra i sessi sia stato insegnare alle donne del nostro secolo a non lasciare tutta l'iniziativa agli uomini?

## 3. Un pizzico di poligamia

Una delle ipotesi cruciali del gioco delle coppie è che gli abbinamenti siano monogami. Tuttavia, pensando ad una versione del gioco delle coppie di sapore orientale, potremmo immaginare che agli uomini sia concesso prendere in moglie fino a quattro donne. Che cosa succede se modifichiamo il gioco delle coppie consentendo ad uno dei due sessi di praticare la poligamia?

Le cose si fanno più interessanti se cambiamo i soggetti e, invece di uomini e donne, parliamo di aziende e lavoratori oppure di università e studenti. Di norma, un'azienda assume più lavoratori, mentre ciascun lavoratore è dipendente di una sola azienda. Similmente, un'università accoglie svariati studenti, mentre ciascuno di questi è iscritto ad una sola università. Quindi possiamo vedere i loro rapporti come una forma di gioco delle coppie in cui uno dei lati ha diritto di praticare la poligamia e l'altro no.

Ci sono $n$ atenei ed $m$ studenti. Ogni ateneo può accettare le iscrizioni di diversi studenti, eventualmente fino al raggiungimento di un numero chiuso da questi fissato. Ogni studente può invece iscriversi ad un solo ateneo. Gli atenei non sono obbligati ad accettare tutte le iscrizioni che ricevono e gli studenti non sono obbligati a iscriversi all'università. Ogni studente ha un ordinamento di preferenza sugli atenei, in base al quale non è mai perfettamente indifferente fra due università.

Gli atenei hanno un ordinamento di preferenza sugli studenti senza casi di indifferenza, con un'ipotesi aggiuntiva: il gradimento di uno studente da parte dell'università non dipende da chi vi è già stato ammesso. In termini formali, se nel confronto diretto l'università considera lo studente $x$ migliore di $y$, questo rimane vero anche quando l'università ha già accettato l'iscrizione di alcuni studenti e deve valutare se adesso preferisce prendere $x$ o $y$. Questo genere di ipotesi esclude i casi di discriminazione positiva (*affirmative action*), dove uno studente ritenuto migliore viene scartato perché si preferisce ammettere uno studente peggiore che però rappresenta un'etnia o un altro raggruppamento socialmente svantaggiato. La nostra ipotesi impone che la valutazione di uno studente dipenda soltanto dai suoi meriti intrinseci e non anche da quanti studenti delle diverse etnie sono già stati ammessi.

Studenti e atenei cercano di combinare abbinamenti tra loro o, in un linguaggio più burocratico, di formare le classi per il nuovo anno accademico. Questo è una forma di gioco delle coppie, dove è ammessa poligamia unilaterale da parte degli atenei. Mediante un'opportuna trasformazione, questo problema può essere ricondotto ad un gioco delle coppie senza poligamia. Per questa ragione, molte delle proprietà matematiche già viste persistono anche per questo modello.

In particolare, valgono i seguenti quattro teoremi, analoghi a quelli già presentati per il gioco delle coppie in regime di monogamia. Primo, esiste sempre almeno un abbinamento stabile. Secondo, l'abbinamento stabile può non essere unico. Terzo, se in un abbinamento stabile uno studente non è ammesso da nessun ateneo, allora resta non ammesso in qualsiasi altro abbinamento stabile; inoltre, il numero di posti disponibili che un ateneo riesce a riempire è lo stesso in ogni abbinamento stabile e, se gli studenti ammessi sono inferiori al numero chiuso, allora persino l'insieme degli studenti accettati è lo stesso. Quarto, atenei e studenti hanno preferenze collettive opposte sugli abbinamenti stabili.

L'algoritmo di Gale e Shapley per la ricerca di un abbinamento stabile si generalizza in modo naturale. Anche in questo caso, bisogna assegnare ad uno dei due lati il compito di proporre ed all'altro quello di accettare. Il lato che propone risulta favorito, nel senso che l'algoritmo genera l'abbinamento stabile che risulta collettivamente preferito. Dato che studenti e atenei hanno preferenze collettive opposte, questo ripropone il problema della scelta del lato a cui affidare il ruolo di proponente. In questo caso, tuttavia, l'asimmetria tra il lato poligamo e quello monogamo suggerisce come scelta naturale di favorire il secondo, che appare più debole. Infatti, tradizionalmente sono gli studenti a chiedere di iscriversi ad un'università oppure i lavoratori a fare domanda di assunzione.

## 4. Non è solo un gioco

Come in molti altri paesi, negli U.S.A. i laureati in medicina devono conseguire una specializzazione presso un reparto ospedaliero. Nelle prime decadi del 1900, la concorrenza fra gli ospedali per avere i migliori specializzandi e la concorrenza fra i laureati per le sedi migliori aveva forzato un clima in cui le offerte di posti di specializzazione venivano fatte troppo presto. Negli anni '40, le offerte venivano spesso fatte all'inizio del terzo anno del corso di laurea, quando non c'era ancora abbastanza informazione sulle abilità e sulla preparazione dello studente. A loro volta, gli studenti dovevano accettare o rifiutare un'offerta senza avere modo di sapere quali altre offerte avrebbero potuto ricevere successivamente. Insomma, il processo di selezione degli specializzandi era nel caos.

Tra il 1945 ed il 1951, si fece un serio tentativo per istituire una scadenza unica per accettare un'offerta, ma lo sforzo non sortì effetti duraturi. Gli ospedali continuavano a imporre scadenze a brevissimo termine, costringendo gli studenti a decidere al buio. A loro volta, gli ospedali dovevano imbarcarsi in complicate e affannose ricerche perché, quando uno studente rifiutava un'offerta, era spesso troppo tardi per fare una proposta alla seconda scelta. Nel 1951 il caos fu domato adottando un algoritmo centralizzato per gli abbinamenti, che è noto come National Resident Matching Program (nel seguito, NMRP). Abbiamo tratto queste informazioni da Roth [5].

L'importanza dell'NMRP, che ogni anno stabilisce gli abbinamenti tra specializzandi e ospedali per tutti gli Stati Uniti, è ovviamente molto grande. Tuttavia, nonostante il nuovo algoritmo funzionasse piuttosto bene, nessuno aveva una chiara spiegazione per il suo successo.

Nel 1962 Gale e Shapley [4], senza conoscere l'NMRP, descrivono il gioco delle coppie sull'*American Mathematical Monthly*. Nel 1984 Alvin Roth [6] si accorge che l'NMRP equivale sostanzialmente all'algoritmo di Gale e Shapley e rapidamente comprende la ragione del suo successo. Il problema di abbinare specializzandi e ospedali è una versione del gioco delle coppie con poligamia unilaterale. L'algoritmo centralizzato dell'NMRP funziona molto bene perché produce abbinamenti stabili.

Questa intuizione ha consentito di aggiornare l'NMRP in modo da prendere in considerazione l'evoluzione delle caratteristiche dei suoi partecipanti. Ad esempio, uno dei problemi più grossi recentemente affrontati è che nel corso del tempo è molto aumentato il numero delle coppie di specializzandi che cercando due posizioni nella stessa area geografica; vedi [7]. Questo è una conseguenza naturale dell'evoluzione dei costumi. Mentre negli anni '50 il tipico specializzando era single oppure sposato ad un coniuge disposto a seguirlo, adesso è piuttosto consueto che gli studenti di medicina conoscano il loro partner durante gli studi. Si formano così coppie che al termine degli studi desiderano convivere e quindi cercano due posti da specializzandi in ospedali vicini.

Le applicazioni del gioco delle coppie non si fermano qui. Nel mondo sono stati proposti oppure sono efficacemente in uso altri algoritmi centralizzati simili all'NMRP, spesso ispirati da questo oppure dallo studio teorico del gioco delle coppie e dell'algoritmo di Gale e Shapley [4]. Tra le applicazioni nelle quali questi algoritmi hanno avuto successo, ricordiamo: meccanismi analoghi all'NMRP in Canada e in Gran Bretagna; sistemi per l'ingresso sul mercato locale del lavoro in alcune province del Canada; la National Panhellenic Conference negli U.S.A. per l'assegnazione delle matricole di sesso femminile alle residenze universitarie "a tema" note come *sororities*; il mercato per il reclutamento dei giocatori di football nei college universitari americani.

Tra i meccanismi proposti per migliorare la situazione esistente, menzioniamo la proposta di modificare il sistema di abbinamento tra studenti e atenei in Turchia, che già avviene in modo centralizzato su base nazionale [8]. Un'altra recente e importante proposta, peraltro basata su tecniche create per risolvere problemi di abbinamento diversi dal gioco delle coppie, suggerisce l'istituzione di un mercato centralizzato per lo scambio dei reni tra i pazienti in lista d'attesa per un trapianto e i potenziali donatori [9]. Questa proposta è stata approvata nel Settembre 2004 dal Renal Transplant Oversight Committee del New England; presto probabilmente sarà possibile valutarne l'efficacia.

## Riferimenti bibliografici

[1] J.M. Gottman, J.D. Murray, C. Swanson, R. Tyson, K.R. Swanson (2003) *The Mathematics of marriage: Dynamic nonlinear models*, The MIT Press, Cambridge (USA)
[2] P.S. Bearman, J. Moody, K. Stovel (2004) Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks, *American Journal of Sociology* 100, pp. 44-91
[3] A.E. Roth, M.A.O. Sotomayor (1990) *Two-sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (UK)
[4] D. Gale, L.S. Shapley (1962) College admission and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly* 69, pp. 9-14
[5] A.E. Roth (2003) The origins, history, and design of the Resident Match, *Journal of the American Medical Association* 289, pp. 909-912
[6] A.E. Roth (1984) The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory, *Journal Political Economy* 92, pp. 991-1016
[7] A.E. Roth (2003) The economist as engineer: Game theory, experimentation, and computation as tools for design economics, *Econometrica* 70, pp. 1341-1378
[8] M. Balinski, T. Sönmez (1999) A tale of two mechanisms: Student placement, *Journal of Economic Theory* 84, pp. 73-94
[9] A.E. Roth, T. Sönmez, M.U. Ünver (2004) Kidney exchange, *Quarterly Journal of Economics* 119, pp. 457-488