Aritmetica per la Costituzione:
La ripartizione dei seggi al Senato

Marco Li Calzi
Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Venezia

Introduzione

Anche le Costituzioni devono "fare i conti" con l'aritmetica. Ad esempio, l'articolo 1 della Costituzione degli Stati Uniti d'America (1789) sottopone al Congresso l'obbligo di risolvere un problema aritmetico di equa rappresentanza degli Stati nell'organo legislativo: ad ogni Stato deve essere assegnato un numero di rappresentanti al Congresso proporzionale alla sua popolazione.

Come vedremo, questo problema non ammette una soluzione esatta e determinare quale sia la migliore approssimazione è difficile. Negli Stati Uniti, l'approssimazione in uso — stabilita per legge dal Congresso — è stata cambiata più volte. Nel 1948, invece, la Costituzione della Repubblica Italiana ha preferito non demandare al Parlamento la ricerca della soluzione al problema, fissando esplicitamente la regola da seguire negli articoli 56 (per la Camera dei Deputati) e 57 (per il Senato della Repubblica). Con la riforma costituzionale del 1963, l'articolo 57 è stato modificato in più punti introducendo fra l'altro un metodo diverso per la ripartizione dei seggi al Senato. I due metodi producono spesso ripartizioni identiche, ma godono di proprietà diverse.

1. La formulazione del problema

Facciamo un passo indietro, in modo da vederci meglio. Supponiamo che un generoso benefattore abbia donato 21 computer identici da distribuire fra le tre scuole elementari di un plesso in proporzione al numero degli studenti. La scuola A ha 548 studenti; la scuola B ha 432 studenti; la scuola C ha 158 studenti.

Rappresentiamo la situazione nella Tabella 1. La prima colonna è intestata alle scuole. La seconda colonna riporta il numero degli studenti e la terza colonna fornisce il loro numero in percentuale sul totale dei 1138 studenti del plesso. La *quota* nella quarta colonna è data dal prodotto fra questa percentuale ed il numero di computer disponibili; essa rappresenta il numero esatto di computer che una ripartizione perfettamente proporzionale dovrebbe assegnare a ciascuna scuola.

Scuola	no. studenti	% studenti	quota
A	548	48,16 %	10,11
B	432	37,96%	7,97
C	158	13,88%	2,92
Totale	1138	100%	21

Tabella 1. La ripartizione dei computer fra tre scuole.

L'ovvio problema è che i computer sono beni indivisibili: non è possibile assegnare una frazione di computer ad una scuola. Quindi non possiamo dare 10,11 computer alla scuola A, come prescrive la quota proporzionale. Come si deve procedere per distribuire i 21 computer? Una soluzione parziale ma piuttosto naturale assegna a ciascuna scuola almeno la parte intera della sua quota: 10 computer ad A, 7 a B, e 2 a C. In questo modo si distribuiscono 19 computer. Ne restano da attribuire ancora 2, e quindi almeno una scuola riceverà necessariamente un numero di computer inferiore alla sua quota mentre almeno un'altra scuola ne avrà di più. Dobbiamo trovare un criterio generale per decidere chi deve essere favorito.

Il problema dell'*equa suddivisione* consiste nel trovare un modo equo per ripartire un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo (quanto più possibile) proporzionale. Questi oggetti identici ed indivisibili da suddividere ed i parametri di proporzionalità possono essere i più diversi: i computer per le scuole di un plesso in relazione al numero degli studenti; le biglie della collezione del nonno fra gli eredi secondo le quote di legittima; o i turni di riposo in proporzione alle ore lavorate. Ma la struttura matematica del problema non cambia: in generale, le quote sono numeri razionali mentre il numero degli oggetti assegnati deve essere intero. La soluzione che cerchiamo consiste nel trovare una configurazione di numeri interi che meglio approssima l'ideale di proporzionalità rappresentato dalle quote.

Il problema dell'equa suddivisione diventa particolarmente rilevante quando interessa i seggi della Camera da distribuire in proporzione al numero dei voti ricevuti da ciascun partito (in un sistema proporzionale) oppure i seggi del Senato da assegnare a ciascuna regione in proporzione alle rispettive popolazioni (in un sistema federale). Per semplicità, in questo lavoro facciamo riferimento al secondo caso, che ricomprende sia la ripartizione dei seggi del Congresso fra i 50 stati degli USA sia l'assegnazione dei seggi del Senato fra le 20 regioni della Repubblica Italiana.

Riprendiamo l'esempio precedente, ma supponiamo di volere assegnare 21 seggi fra le tre regioni A, B e C in proporzione alla loro popolazione. Per maggior realismo, il numero degli abitanti di una regione è ottenuto moltiplicando per diecimila il numero degli studenti nell'esempio precedente. Come si vede immediatamente nella Tabella 2, non cambiano né la percentuale di abitanti né la quota e quindi in generale il problema è invariante rispetto ad una trasformazione omogenea del criterio di proporzionalità.

Utilizzando la soluzione parziale che assegna ad ogni regione un numero di seggi non inferiore alla parte intera della sua quota, possiamo attribuire 10 seggi ad A, 7 a B, e 2 a C. Con questa suddivisione, la regione A non ha la maggioranza assoluta dei seggi. A seconda di come attribuiamo i due seggi residui, la bilancia del potere può spostarsi in modo significativo. Se diamo ancora un seggio ad A, questa ottiene la maggioranza assoluta dei seggi (e il controllo del Senato) senza rappresentare la maggioranza assoluta degli abitanti. In casi come questo, il problema dell'equa suddivisione si confonde con il problema di determinare o limitare il potere di ciascuna regione. Noi tratteremo il problema dell'equa suddivisione in base ad argomenti di equità e di buon senso indipendenti dagli effetti sulla distribuzione di potere.

Regione	no. abitanti	% abitanti	quota
A	5.480.000	48,16 %	10,11
B	4.320.000	37,96%	7,97
C	1.580.000	13,88%	2,92
Totale	11.380.000	100%	21

Tabella 2. La ripartizione dei seggi fra tre regioni.

2. Il metodo di Hamilton

La prima proposta storicamente documentata per risolvere il problema dell'equa suddivisione fu avanzata da Alexander Hamilton (1755-1804) nel 1791, subito dopo che il primo censimento aveva determinato la popolazione nei 13 stati che avevano firmato la Dichiarazione di Indipendenza degli Stati Uniti. La illustriamo con riferimento all'esempio in Tabella 2. Nel prossimo paragrafo il testo in corsivo descrive il metodo generale, mentre il testo in stampatello esemplifica l'applicazione.

Per prima cosa, *ad ogni regione si assegna un numero di seggi uguale alla parte intera della sua quota.* Dunque A riceve inizialmente 10 seggi, B ne riceve 7 e C solo 2. In questo modo sono assegnati 19 seggi e ne restano da attribuire ancora 2. *I seggi residui sono assegnati agli stati che hanno i resti più alti.* Nella fattispecie, i resti sono 0,11 per A; 0,97 per B; 0,92 per C. Quindi i due seggi residui sono attribuiti rispettivamente a B e C. L'assegnazione finale è 10 seggi ad A, 7+1=8 a B e 2+1=3 a C. Intuitivamente, i seggi residui sono attribuiti secondo un ordine di priorità determinato dal livello dei resti: ad un resto più alto corrisponde un "maggior" diritto ad avere uno dei seggi ancora disponibili.

La storia non finisce qui. La proposta di Hamilton, approvata a maggioranza dal Congresso, fu inviata al Presidente Washington che, invece di promulgarla, appose il primo veto presidenziale nella storia degli USA. Il veto presidenziale è una clausola di salvaguardia costituzionale che consente al Presidente di rinviare al Congresso una legge; in questo caso, per l'approvazione diventa necessaria una maggioranza qualificata di 2/3. In seguito al veto, il

Congresso riesaminò la legge già approvata e decise di sostituire il metodo di Hamilton con un metodo proposto da Thomas Jefferson (1743-1826), di cui parleremo più avanti.

Nel corso degli anni sono state proposte diverse soluzioni per il problema dell'equa suddivisione. I metodi di ripartizione più importanti si devono ad Hamilton (1791), Jefferson (1791), Webster (1830), Adams (1830), Dean (1832), e Hill (1911). Non è affatto semplice determinare quale metodo sia più equo. Lo stesso Congresso degli USA ha modificato la legge elettorale più volte, anche se talvolta ciò è avvenuto essenzialmente per ragioni di convenienza politica. Sinteticamente, possiamo dire che il metodo di Jefferson è stato adottato dal 1792 al 1840. Il metodo di Webster è subentrato dal 1840 al 1850, mentre quello di Hamilton è stato in vigore dal 1850 al 1911. Il metodo di Webster è stato ripristinato dal 1911 al 1941, quando è stato soppiantato dal metodo di Hill in uso ancora oggi.

3. Tre paradossi

Il metodo di Hamilton appare una soluzione piuttosto naturale ma, sorprendentemente, ci sono ottime ragioni per metterlo in discussione. Vediamo la prima con l'aiuto della Tabella 3, dove abbiamo riportato un esempio di ripartizione di sette seggi fra quattro stati adattato da Young (1995).

Regione	pop.	quota	seggi	pop.	quota	seggi
A	752	5,013	5	753	3,984	4
B	101	0,673	1	377	1,995	2
C	99	0,660	1	96	0,508	0
D	98	0,653	0	97	0,513	1
Totale	1050	7	7	1323	7	7

Tabella 3. Il paradosso della popolazione.

Nella parte sinistra della tabella, leggiamo le popolazioni (in migliaia), le relative quote e l'assegnazione dei seggi seguendo il metodo di Hamilton. Nella parte destra della tabella leggiamo le popolazioni alla successiva elezione: in seguito a nascite, morti e flussi migratori, la popolazione complessiva è aumentata da 1050 a 1323. Questo aumento non si è distribuito in modo uniforme fra le quattro regioni. Come è naturale, ci aspettiamo che le nuove quote e la nuova ripartizione dei seggi (calcolata con il metodo di Hamilton) sulla parte destra risentano dei cambiamenti demografici.

Confrontando la parte sinistra con la destra, osserviamo una situazione paradossale: mentre la popolazione di A è aumentata e quella di D è diminuita, il numero dei seggi di A è sceso da 5 a 4 e quello di D è salito da 0 a 1. In altre parole, i seggi si spostano in direzione opposta all'aumento della popolazione! E' facile immaginare a quali tensioni e dubbi sull'equità del metodo possa dare luogo questa situazione. Uno scenario in cui la popolazione di una regione cresce e quella di un'altra regione diminuisce mentre le rispettive assegnazioni di seggi si muovono in direzione opposta è noto come *Paradosso della popolazione*. Come mostra l'esempio, l'uso del metodo di Hamilton espone al rischio che si possa verificare un paradosso della popolazione. Altri metodi, come vedremo, garantiscono che ciò non possa avvenire.

Un'altra situazione imbarazzante a cui espone l'uso del metodo di Hamilton è la seguente: supponendo che le popolazioni restino costanti, un aumento del numero totale dei seggi da assegnare può ridurre il numero dei seggi attribuiti ad una particolare regione. (Naturalmente, vale anche il contrario: una riduzione del numero totale dei seggi può comportare l'aumento dei seggi attribuiti ad una regione.) Questo scenario è noto come *Paradosso dell'Alabama* dal nome dello stato per il quale nel 1880 l'Ufficio del Censimento americano rilevò il rischio che si manifestasse il fenomeno. Vediamo un esempio nella Tabella 4. Nella parte sinistra, si attribuiscono 10 seggi fra tre regioni; nella parte destra, si ripartiscono 11 seggi. Le popolazioni sono costanti.

Regione	pop.	quota	seggi	pop.	quota	seggi
A	600	4,286	4	600	4,714	5
B	600	4,286	4	600	4,714	5
C	200	1,429	2	200	1,571	1
Totale	1400	10	10	1400	11	11

Tabella 4. Il paradosso dell'Alabama.

Come si vede, la regione C si vede attribuiti 2 seggi quando (a sinistra) ce ne sono 10 da ripartire ma soltanto 1 quando (a destra) i seggi totali salgono a 11. L'aumento dei seggi produce un "furto" ai danni di C difficile da comprendere e da giustificare, visto che null'altro è cambiato. L'uso del metodo di Hamilton espone al rischio che si verifichi un paradosso dell'Alabama, che almeno in teoria può diventare un ostacolo ingombrante ad una proposta di variazione del numero dei parlamentari. Fortunatamente, esistono metodi di ripartizione dei seggi immuni da questo paradosso.

Il terzo paradosso a cui è soggetto il metodo di Hamilton fu scoperto nel 1907, quando l'Oklahoma entrò a far parte degli Stati Uniti d'America. Prima del suo ingresso, il Congresso disponeva di 386 seggi. Fu calcolato che il numero equo di seggi da attribuire all'Oklahoma fosse 5. Per non costringere nessuno degli altri stati a cederne qualcuno, fu deciso di aggiungere ai seggi già esistenti cinque nuovi seggi per l'Oklahoma, portando il totale a 391. L'ovvia intenzione era di assegnare i nuovi seggi all'Oklahoma, lasciando a tutti gli altri stati il numero di seggi che avevano prima. Come prescriveva la legge, fu applicato il metodo di Hamilton per ripartire 391 seggi fra tutti gli stati ma accadde qualcosa di inatteso: il metodo confermava l'attribuzione di 5 seggi all'Oklahoma, ma imponeva anche allo stato di New York di cederne uno al Maine. In altre parole, l'aggiunta di nuovi seggi interamente assegnati ad un nuovo stato finiva per modificare anche le vecchie attribuzioni! Questo tipo di scenario è noto come *paradosso dei nuovi stati*. Ancora una volta, il metodo di Hamilton si rivela soggetto ad un paradosso da cui sono immuni altri metodi di ripartizione. Vale la pena segnalare che fu proprio il paradosso dell'Oklahoma a dare il colpo di grazia all'uso del metodo di Hamilton negli Stati Uniti, che fu abrogato nel 1911.

4. I metodi con divisore

A questo punto ci sembra tempo di vedere qualche metodo di ripartizione diverso da quello di Hamilton. Cominciamo naturalmente dal metodo di Jefferson, che dopo il veto di Washington nel 1792 divenne il primo metodo ufficialmente adottato per la ripartizione dei seggi del Congresso USA. Vale la pena di menzionare che in ambito europeo il metodo di Jefferson è comunemente attribuito a Victor d'Hondt (1841-1901), un giurista belga appassionato di matematica che inconsapevolmente lo ripropose nel 1878.

Il metodo di Jefferson richiede di scegliere un divisore d che rappresenta il numero ideale di abitanti (o elettori) che dovrebbe corrispondere ad ogni seggio e di calcolare per ogni regione i un *quoziente* $q_i=p_i/d$ pari al rapporto tra la sua popolazione ed il divisore. *Ad ogni regione è attribuito un numero di seggi uguale alla parte intera del quoziente*. Il numero complessivo di seggi assegnati dipende dal divisore scelto. Se questo numero è fissato all'inizio, si rende necessario scegliere un divisore che generi il giusto numero complessivo di seggi. Ad esempio, se prendiamo l'esempio riportato in Tabella 2 e per semplicità esprimiamo le popolazioni in decine di migliaia, il divisore d=90 genera i quozienti q_A=6,09, q_B=4,80 e q_c=1,76 con parte intera rispettivamente 6, 4, e 1. Questi tre valori rappresentano i seggi rispettivamente assegnati alle tre regioni. In questo caso, il metodo di Jefferson ripartisce un totale di 11 seggi. Se desideriamo suddividere esattamente 21 seggi, basta diminuire il divisore a d=50: i quozienti diventano q_A=10,96, q_B=8,64 e q_c=3,16 e le rispettive parti intere 10, 8 e 3.

Il metodo di John Quincy Adams (1767-1848) è del tutto analogo, ma attribuisce *ad ogni regione un numero di seggi uguale al quoziente arrotondato per eccesso*. (Il metodo di Jefferson arrotonda invece per difetto.) Con riferimento al solito esempio, la scelta del divisore d=90 conduce ad assegnare ad A, B, e C rispettivamente 7, 5, e 2 seggi, per un totale di 14. Scegliendo opportunamente d=60, invece, si possono suddividere esattamente 21 seggi attribuendone rispettivamente 10, 8 e 3.

Il metodo di Daniel Webster (1782-1852), invece, propone di attribuire *ad ogni regione un numero di seggi uguale al quoziente arrotondato all'intero più vicino*. In ambito europeo questo metodo è comunemente attribuito ad André Sainte-Laguë (1882-1950), un matematico francese che lo riscoprì nel 1910. Nel solito esempio, il divisore d=90 genera rispettivamente 6, 5, e 2 per A, B, e C, per un totale di 13. Scegliendo opportunamente d=55, invece, i 21 seggi sono suddivisi rispettivamente in 10, 8 e 3.

Questi tre metodi sono collegialmente noti come *metodi con divisore* perché si differenziano soltanto nel modo in cui arrotondano i quozienti generati dal divisore comune. Oltre a essi, esistono altri due metodi con divisore (Dean, 1832; Hill, 1911) che risolvono in modo più originale il problema di arrotondare il quoziente ad un numero intero. Per semplicità, confineremo la discussione ai metodi di Adams, Jefferson e Webster ma quanto attribuiremo ai metodi con divisore vale anche per i due metodi qui sottaciuti.

Come si può controllare, rispetto al problema di suddividere 21 seggi fra le tre regioni della Tabella 2, sia il metodo di Hamilton sia i metodi con divisore producono tutti la stessa ripartizione finale: 10 seggi ad A, 8 a B e 3 a C. Il sospetto che, al di là della specifica formulazione matematica, conducano tutti alla stessa suddivisione è legittimo ma, ahimé!, infondato: in generale, ciascuno di questi metodi può condurre ad una suddivisione diversa da tutti gli altri. Abbiamo aperto con un esempio in cui tutti concordano perché vogliamo valutare i metodi secondo le loro proprietà generali e non secondo il particolare risultato ottenuto in un esempio.

5. Criteri di priorità

Ritorniamo adesso al metodo di Hamilton, per chiederci quale sia la causa di tutti i paradossi a cui espone il suo uso. Essa risiede nell'uso di due logiche diverse, che non sono coerenti tra loro. Il metodo di Hamilton, infatti, funziona in due stadi. Nel primo stadio, si assegna un numero di seggi uguale alla parte intera della quota. Nel secondo stadio, si attribuiscono i seggi residui sulla base dei resti più alti. Poiché non esiste nessuna relazione matematica rilevante dal punto di vista dell'equità tra la parte intera e i resti di una divisione, l'attribuzione dei seggi al primo stadio si basa su un criterio indipendente da quello usato per i seggi residui. Questo rende il metodo soggetto a incongruenze, che i paradossi presentati nella Sezione 3 rendono manifeste.

Se vogliamo formulare un metodo di ripartizione coerente (e dunque immune dai paradossi), occorre ragionare diversamente e trovare il modo di assegnare tutti i seggi seguendo un solo criterio. Un'idea efficace è assegnare i seggi seguendo un ordinamento di priorità espresso da un indice numerico. I seggi si attribuiscono uno per volta alla regione con l'indice di priorità più alto, fino a quando tutti sono stati assegnati.

Un indice di priorità naturale è il rapporto p_i/s_i tra la popolazione della regione *i* e il numero di seggi a questa già attribuito. Questo indice misura il numero di abitanti che corrispondono in media ad un seggio. Ad esempio, se $p_A/s_A=1000$ e $p_B/s_B=700$, vuol dire che ci sono 1000 abitanti per ogni seggio assegnato ad A e 700 per ogni seggio assegnato a B. Le regioni con un indice più alto sono relativamente sottorappresentate e quindi hanno una priorità maggiore nell'assegnazione di un ulteriore seggio.

Vediamo come funziona il metodo, riprendendo i dati della Tabella 2. (Per semplicità, le popolazioni sono indicate in decine di migliaia.) Dobbiamo attribuire 21 seggi. Scriviamo in testa ad ogni colonna (a partire dalla terza) il numero progressivo dei seggi da 0 a 20 e riportiamo in ogni casella il rapporto tra la popolazione della regione sulla relativa riga ed il numero di seggi sulla relativa colonna. Ci prendiamo la licenza di scrivere “infinito” nella terza colonna, dove appare zero al denominatore.

Seggi		0	1	2	3	4	…	20
Regione	pop.	indice	indice	indice	indice	indice	indice	indice
A	548	infinito	548	274	182,7	137,0	…	27,4
B	432	infinito	432	216	144,0	108,0	…	21,6
C	158	infinito	158	79	52,7	39,5	…	7,9

Tabella 5. La ripartizione di 21 seggi fra tre regioni.

All’inizio nessun seggio è stato attribuito e quindi il rapporto p_i/s_i vale “infinito” per tutti, come si legge nella terza colonna. Assegniamo un seggio a ciascuna regione. Gli indici di priorità per l’assegnazione del quarto seggio diventano 548 per A, 432 per B e 158 per C, come indicato nella quarta colonna. Adesso A ha l’indice più alto e quindi le assegniamo un secondo seggio, portando a quattro il totale dei seggi già attribuiti. I nuovi indici di priorità per l’assegnazione del quinto seggio sono 274 per A, 432 per B e 158 per C, così che B riceve un secondo seggio. Iterando il procedimento, gli indici di priorità per l’attribuzione del sesto seggio sono ora 274 per A, 216 per B e 158 per C e quindi A riceve un terzo seggio. Gli indici relativi al settimo seggio sono 182,7 per A, 216 per B e 158 per C; il seggio è assegnato a B. E così via, fino a quando il ventunesimo seggio è attribuito ad A. La ripartizione finale conferisce 10 seggi ad A, 8 a B e 3 a C; gli indici di priorità al termine del processo sono rispettivamente 54,8; 54,0; e 52,7.

La procedura appena descritta dispensa i seggi uno per volta secondo il criterio di priorità fornito dal rapporto p_i/s_i. Come si dimostra matematicamente, essa equivale al metodo di Adams. Ovviamente si possono usare criteri di priorità diversi. Ad esempio, l’uso del metodo di Jefferson è equivalente al criterio di priorità fornito dal rapporto $p_i/(s_i+1)$, che è il rapporto fra la popolazione di una regione ed il numero dei seggi ricevuti *dopo* l’assegnazione del seggio in discussione. Il metodo di Webster sta a mezza strada fra questi due ed usa come criterio di priorità il rapporto $p_i/(s_i+½)$.

6. L'importanza di essere coerenti

Il metodo di Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti. I metodi con divisore, invece, sono equivalenti ad una procedura che dispensa i seggi uno per volta seguendo sempre lo stesso criterio di priorità. Abbiamo affermato nella sezione precedente che il metodo di Hamilton è soggetto ai paradossi perché si basa su due logiche distinte. In questa sezione sostanziamo matematicamente questa affermazione sulla base dei Teoremi 8.3 e 8.4 in Balinski e Young (2001).

Un metodo di ripartizione dei seggi è *coerente* quando la suddivisione di un numero fissato di seggi fra due stati non dipende dagli altri stati presenti. Facciamo un esempio, con riferimento alla Tabella 6. Guardando al lato sinistro della tabella, supponiamo di dover ripartire fra le regioni A e B un totale di 17 seggi. Il metodo di Hamilton ed il metodo di Webster concordano nell'assegnare 15 seggi ad A e 2 a B. Guardando al lato destro della tabella, supponiamo di dover ripartire fra le tre regioni A, B e C un totale di 21 seggi. I metodi di Hamilton e Webster concordano nell'assegnare un totale congiunto di 17 seggi alle regioni A e B, ma divergono sul dettaglio della suddivisione. Il metodo di Hamilton assegna 15 seggi ad A quando C è assente e 14 quando C è presente; ovvero, uno dei 17 seggi passa da A a B se compare un terzo incomodo C. Pertanto il metodo di Hamilton non è coerente. Il metodo di Webster, almeno in questo esempio, fornisce sempre la stessa suddivisione. Per affermare che esso è sempre coerente, riesce utile la prossima caratterizzazione.

Regione	pop.	Hamilton	Webster	pop.	Hamilton	Webster
A	727	15	15	727	14	15
B	123	2	2	123	3	2
C				222	4	4
Totale	850	17	17	1072	21	21

Tabella 6. Coerenza nella ripartizione di 17 seggi tra A e B.

Introduciamo due definizioni preliminari. Un metodo di ripartizione è *bilanciato* se il numero di seggi assegnato a due stati con popolazioni uguali differisce al più di uno. Se consideriamo il caso di due sole regioni con popolazioni identiche, un metodo ideale dovrebbe ovviamente assegnare a ciascuna lo stesso numero di seggi; ma questo è possibile soltanto quando il numero totale dei seggi è pari. Se è dispari, il meglio che si può fare è dare un seggio in più ad una delle due regioni. Un metodo bilanciato garantisce questo risultato. Diciamo invece che un metodo è *imparziale* quando l'assegnazione dei seggi dipende solo dalle popolazioni e dal numero totale dei seggi. La caratterizzazione dei metodi coerenti è la seguente.

Teorema 1. Un metodo è coerente, bilanciato e imparziale se e solo se si basa su un solo criterio di priorità.

La coerenza, come mostra una lettura attenta della definizione, esclude che possano verificarsi i paradossi dell'Alabama e dei nuovi stati. Dunque ogni metodo di ripartizione riconducibile ad un solo criterio di priorità è immune da due dei tre paradossi presentati. Come abbiamo visto, i metodi con divisore si basano su un criterio unico di priorità e quindi sono coerenti. Naturalmente, in generale la classe dei metodi coerenti è molto ampia. Tuttavia, se imponiamo anche il requisito dell'immunità dal paradosso della popolazione, essa può essere ulteriormente rifinita.

Un metodo di ripartizione è *omogeneo* se l'assegnazione dipende solo dalle dimensioni relative delle popolazioni e dal numero totale dei seggi. Come abbiamo visto nella Sezione 1, questo è un requisito del tutto plausibile. Altrettanto naturale è la richiesta che un metodo di ripartizione sia *esatto*, ovvero che ad ogni stato sia attribuito un numero di seggi uguale alla sua quota qualora tutte le quote proporzionali siano numeri interi.

Teorema 2. Fra i metodi che sono coerenti, imparziali, omogenei ed esatti, soltanto i metodi con divisore evitano il paradosso della popolazione.

Il Teorema 1 afferma che la coerenza (che rende immuni da due paradossi) richiede che il metodo di ripartizione si fondi su un solo criterio di priorità. Il Teorema 2 caratterizza i metodi con divisore come gli unici che risultano immuni da tutti e tre i paradossi discussi nella Sezione 3. Questo ci permette di sostenere che un metodo con divisore è superiore rispetto al metodo di Hamilton perché evita tutti i paradossi.

7. Nessun metodo è perfetto

L'ultimo paragrafo della precedente sezione lascia presagire che riteniamo i metodi con divisore superiori al metodo di Hamilton. Dobbiamo però ammettere che in realtà nessun metodo di ripartizione è perfetto: in questa sezione mostriamo che non esiste alcun metodo di ripartizione ragionevole che soddisfa due proprietà molto naturali. Questo ci costringerà a prendere partito: quale che sia il metodo di ripartizione che sceglieremo, almeno una delle due proprietà non sarà soddisfatta.

Certamente, un buon metodo di ripartizione deve essere *monotono*: se la quota di una regione aumenta, il numero di seggi ad essa attribuiti non deve diminuire. Questo è un requisito di buon senso, che non metteremo in discussione. Le altre proprietà che cercheremo di soddisfare simultaneamente sono due. Primo, un metodo di ripartizione deve essere immune al paradosso della popolazione: non può accadere che una riduzione della popolazione consenta ad una regione di guadagnare un seggio a spese di un'altra dove la popolazione invece è cresciuta. La seconda proprietà è che il metodo di ripartizione deve assegnare ad una regione un numero di seggi che non dista dalla quota più di uno. Ad esempio, ad una quota di 3,14 corrispondono non meno di 3 e non più di 4 seggi. In altre parole, il numero di seggi assegnato deve essere compreso fra l'arrotondamento per difetto e l'arrotondamento per eccesso della quota. Per comodità, chiamiamo l'assenza di questa proprietà *violazione della quota*. Vale il seguente risultato di impossibilità.

Teorema 3. Ogni metodo di ripartizione monotono che non viola mai la quota è soggetto al paradosso della popolazione.

Di questo teorema forniamo la facile dimostrazione. Riprendiamo l'esempio riportato nella Tabella 3, nel quale bisogna suddividere 7 seggi fra quattro regioni. Per comodità di lettura, ricopiamo nella Tabella 7 le popolazioni e le quote. Relativamente ai dati sul lato sinistro della tabella, le quote di A, B, C, D sono rispettivamente: 5,013; 0,673; 0,660 e 0,653. Per non violare la quota, dobbiamo assegnare ad A tra 5 e 6 seggi e a ciascuna delle altre tre regioni tra 0 e 1 seggio. Come si controlla facilmente, esistono soltanto due assegnazioni monotone che non violano la quota. La prima assegna 5 seggi ad A e 1 ciascuno a B e C; la seconda assegna 6 seggi ad A ed 1 a B. In entrambi casi, D non riceve nessun seggio ed A almeno cinque.

Regione	pop.	Quota	pop.	quota
A	752	5,013	753	3,984
B	101	0,673	377	1,995
C	99	0,660	96	0,508
D	98	0,653	97	0,513
Totale	1050	7	1323	7

Tabella 7. Il paradosso della popolazione.

Procedendo in modo analogo per i dati sul lato destro della Tabella, troviamo che esistono soltanto tre assegnazioni monotone che non violano la quota. La prima assegna 4 seggi ad A, 2 a B e 1 a D; la seconda attribuisce 4 seggi ad A e 1 ciascuno a B, C, D; la terza assegna 3 seggi ad A, 2 a B e 1 ciascuno a C e D. In ogni caso, A riceve al più 4 seggi e D ne riceve certamente almeno 1.

Confrontando i dati relativi alle popolazioni con le assegnazioni minime e massime, troviamo che A passa dai 5 seggi minimi del lato sinistro ai 4 seggi massimi del lato destro mentre la sua popolazione aumenta; invece D passa dagli 0 seggi del lato sinistro ad 1 seggio mentre la sua popolazione diminuisce. Comunque si scelgano i seggi da attribuire ad A, ne segue che l'obbligo di non violare la quota ci forza in un paradosso della popolazione.

Sappiamo già che il metodo di Hamilton è soggetto al paradosso della popolazione. Il Teorema 3 rivela che tutti i metodi con divisore invece sono soggetti a violare la quota. In ultima analisi, pertanto, si tratta di decidere quale dei due sia il male minore. Per un resoconto dettagliato di altre proprietà e delle differenze tra questi e altri metodi di ripartizione, si veda Balinski e Young (2001).

8. La soluzione italiana

Vediamo in dettaglio che cosa dice la Costituzione della Repubblica Italiana in relazione alla scelta del metodo di ripartizione. Il primo comma dell'art. 57 nella versione originale del 1948 recita: "A ciascuna Regione è attribuito un senatore per duecentomila abitanti o per frazione superiore a centomila." Questo è il metodo di Webster con divisore comune d=200.000. Il numero dei seggi al Senato non è fissato a priori, ma dipende dalle dimensioni della popolazione.

La riforma costituzionale del 1963 ha sostituito la norma come segue: “Il numero dei senatori elettivi è di trecentoquindici. […] La ripartizione dei seggi tra le Regioni [...] si effettua [...] in proporzione alla popolazione delle Regioni, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti." Questo è il metodo di Hamilton con un numero di seggi prefissato a 315 che, dal 1963 ad oggi, è sempre stato più alto di quanto avrebbe comportato la formulazione originale.

Come sappiamo dall’esempio della Tabella 7, i due metodi possono produrre ripartizioni diverse. Sulla base dei dati demografici rilevati dal 1948 ad oggi e delle altre disposizioni di legge, tuttavia, l’uso dell’uno o dell’altro fino ad oggi avrebbe sempre prodotto la stessa ripartizione. Considerato che ai fini pratici i metodi sono finora risultati equivalenti, si sarebbe tentati di immaginare che nel 1963 il legislatore abbia semplicemente cambiato idea sui vantaggi relativi del metodo di Webster rispetto a quello di Hamilton. La lettura degli atti relativi, tuttavia, non riporta alcun passaggio esplicito in proposito.

L’evidenza indiretta suggerisce una storia diversa. La decisione consapevole fu di innalzare il numero di seggi al Senato. Invece di ridurre il valore del divisore comune, fu scelto di fissare il numero dei seggi. Come sappiamo, quando il numero di seggi è fissato, l’applicazione del metodo di Webster richiede la ricerca del divisore appropriato. L’ipotesi più probabile è che l’adozione del metodo di Hamilton sia imputabile ad una presunta maggiore semplicità di calcolo. Certamente, essa ha eliminato l’obbligo di rendere esplicito il valore del divisore comune d, facilmente interpretabile come il “costo medio” di un senatore in termini di abitanti necessari per avere diritto ad un seggio. Per effetto di un’altra disposizione costituzionale (circa il numero minimo di seggi garantiti), questo “costo medio” è molto diverso da una regione all’altra. Usando i dati del censimento del 2001, esso va da circa 85.000 abitanti per senatore in Basilicata ad oltre 201.000 per la Calabria.

Bibliografia

[1] BALINSKI, M.L., E YOUNG, H.P. 2001. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Washington DC: Brookings University Press, seconda edizione.
[2] D'HONDT, VICTOR. 1878. *Question électorale – La Représentation proportionnelle des partis. Par un électeur.* Bruxelles.
[3] SAINTE-LAGUË, A. 1910. “La représentation proportionnelle et les Mathématiques”, *Revue générale des Sciences pures et appliquées* 21, 846-852.
[4] YOUNG, H.P. 1995. *Equity: In Theory and Practice*, Princeton NJ: Princeton University Press.